
THE
MATRIX

# Serie 12 Ex 7 n°7

$\langle , \rangle : V \times V \to K$

tq $\forall v' \in V - \{0\}$

$\exists r$ tq $\langle v, v' \rangle \neq 0$

# Determinants

# Formes multilineaires

DÉFINITION 10.1. *Soit $V$ un $K$-espace vectoriel et $n \geqslant 1$ un entier. Une forme multilineaire en $n$ variables sur $V$ est une application*

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} V^n & \mapsto & K \\ (v_1, \cdots, v_n) & \mapsto & \Lambda(v_1, \cdots, v_n) \end{array}$$

*telle que pour tout $i = 1, \cdots, n$ et tout choix de $n-1$ vecteurs $v_j \in V$, $j \neq i$, l'application $\Lambda$ "restreinte a la $i$-ieme composante"*

$$v_i \in V \mapsto \Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n) \in K$$

*est lineaire:*

$$\Lambda(v_1, \cdots, \lambda.v_i + v_i', \cdots, v_n) = \lambda.\Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n) + \Lambda(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_n).$$

*L'ensemble des formes multilineaires en $n$ variables sur $V$ est note*

$$\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K) \text{ ou bien } (V^*)^{\otimes n} (\text{notation "produit tensoriel"}).$$

PROPOSITION 10.1. *L'ensemble $\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K) = (V^*)^{\otimes n}$ des formes multilineaires en $n$ variables est un $K$-espace vectoriel quand on le muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelle pour les fonctions a valeurs dans $K$: $\forall \Lambda, \Xi \in (V^*)^{\otimes n}$*

$$(\lambda\Lambda + \Xi)(v_1, \cdots, v_n) = \lambda\Lambda(v_1, \cdots, v_n) + \Xi(v_1, \cdots, v_n).$$

Exemple principal: $\ell_1, \dots, \ell_n \in V^*$

$$\ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_n : (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \ell_1(v_1)\ell_2(v_2)\dots\ell_n(v_n)$$

THÉORÈME 10.1 (Dimension et base de l'espace des formes multilineaires). *Soit* $d = \dim V$, $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset V$ *une base et* $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ *la base duale. Alors* $V^{*\otimes n}$ *est de dimension finie egale a* $d^n$*; une base de* $V^{*\otimes n}$ *est donnee par l'ensemble des formes multilineaires de la forme*

$$\mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \text{ quand } j_1, \cdots, j_n \text{ parcourent } \{1, \cdots, d\}.$$

*On note cette base*

$$(\mathscr{B}^*)^{\otimes n} = \{\mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \ (j_1, \cdots, j_n) \in [1, d]^n\}.$$

*Pour tout* $\Lambda \in (V^*)^{\otimes n}$ *on a la decomposition*

$$\Lambda = \sum_{j_1, \cdots, j_n \leqslant d} \cdots \sum \Lambda(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots \mathbf{e}_{j_n}) \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*$$

# Formes Symmetriques/ Alternées

Définition 10.2. *Une forme multilineaire*

$$\Lambda : V^n \mapsto K$$

*est dite*

- *Symetrique si* $\forall i \neq j \leqslant n$

$$(ij).\Lambda = \Lambda$$

*c'est a dire* $\forall (v_1, \cdots, v_n) \in V^n$, *on a*

$$\Lambda(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_n) = \Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n).$$

*Autrement dit si la valeur de* $\Lambda$ *ne change pas quand on echange deux composantes.*

- *Alternee si* $\forall i \neq j \leqslant n$

$$(ij).\Lambda = -\Lambda$$

*c'est a dire* $\forall (v_1, \cdots, v_n) \in V^n$, *on a*

$$\Lambda(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_n) = -\Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n).$$

*Autrement dit si sa valeur est changee en son opposee si on echange deux composantes distinctes.*

*L'ensemble des formes multilineaires symetriques en* $n$ *variables sur* $V$ *est note*

$$\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K).$$

*L'ensemble des formes multilineaires alternees en* $n$ *variables sur* $V$ *est note*

$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K).$$

Proposition 10.2. *Les ensembles* $\mathrm{Sym}^{(n)}(V; K)$ *et* $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ *sont des SEV de l'espace vectoriel* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V; K)$.

## Rmq : Pourquoi +1 et -1 ?

Si $\Lambda$ vérifie $\forall i<j$

$$(ij)\Lambda = \lambda.\Lambda \qquad \lambda \in K$$

on peut à nouveau appliquer $(ij)$

$$(ij)(ij)\Lambda = \lambda(ij)\Lambda = \lambda^2.\Lambda$$

$$\| $$

$$\Lambda = \lambda^2 \Lambda$$

si $\Lambda \neq \underline{0} \longrightarrow \lambda^2 = 1 \longleftrightarrow \lambda = \pm 1$

# Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathrm{Mult}^{(n)}(V)$

$$\sigma \in \mathrm{Bij}(\{1, \dots, n\}) = \mathfrak{S}_n = S_n$$

On peut former la forme multilinéaire

$$\sigma.\Lambda : (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \Lambda(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots v_{\sigma(n)})$$

THÉORÈME 10.2 (Action par permutation sur les formes multilineaires). *Pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, *l'application*

$$\sigma.\bullet : \Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V,K) \mapsto \sigma.\Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$$

*definit un automorphisme du* $K$*-ev* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$.

*Plus precisement, l'application*

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \sigma.\bullet \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K))$$

*verifie*

- *Soit* $\mathrm{Id}_n$ *la permutation triviale. On a* $\forall \Lambda$, $\mathrm{Id}_n.\Lambda = \Lambda$ *autrement dit*

$$\mathrm{Id}_n.\bullet = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)}.$$

- $\forall \Lambda$, $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, *on a*

$$(\sigma \circ \tau).\Lambda = \sigma.(\tau.\Lambda)$$

*autrement dit*

$$(\sigma \circ \tau).\bullet = (\sigma.\bullet) \circ (\tau.\bullet) = \sigma.(\tau.\bullet).$$

*En particulier, pour tout* $\sigma$

$$(\sigma.\bullet) \circ (\sigma^{-1}.\bullet) = \mathrm{Id}_n.\bullet = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)}$$

*et donc* $\sigma.\bullet$ *est un automorphisme lineaire de* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$ *de reciproque* $\sigma^{-1}.\bullet$.

*Ainsi*

$$\sigma \mapsto \sigma.\bullet$$

*definit une action a gauche* $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$ *par automorphismes lineaires.*

Preuve : $(\sigma \circ \tau).\Lambda = \sigma.(\tau.\Lambda)$

On a

$$\sigma\circ\tau.\Lambda(v_1,\dots,v_n)$$

$$= \Lambda\left(v_{\sigma(\tau(1))}, v_{\sigma(\tau(2))}, \dots, v_{\sigma(\tau(n))}\right)$$

$$\tau.\Lambda(v_1,\dots,v_n) = \Lambda(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(n)})$$

$$\sigma.(\tau.\Lambda)(v_1,\dots,v_n) = (\tau.\Lambda)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})$$

$$(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (w_1, \dots, w_n)$$

$$\tau \cdot \Lambda(w_1, \dots, w_n) = \Lambda(w_{\tau(1)}, \dots, w_{\tau(n)})$$

$$w_i = v_{\sigma(i)}$$

$$w_{\tau(i)} = v_{\sigma(\tau(i))}$$

$$\sigma \cdot (\tau \cdot \Lambda)(v_1, \dots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(\tau(1))}, \dots v_{\sigma(\tau(n))})$$

$\square$

# Rappel: Signature d'une permutation

Il existe un unique morphisme de grp non-trivial

$$\text{sign}: \mathfrak{S}_n \longrightarrow (\{\pm 1\}, \times)$$

la signature. Il est caracterise par le fait $\text{sign}(\tau) = -1$ pour $\tau$ = transposition.

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{t(\sigma)}$$

$t(\sigma)$ = le nb de manière d'écrire $\sigma$ en produit de transposition

$t(\sigma)$ n'est pas uniquement défini mais $t(\sigma) \bmod 2$ est bien défini.

THÉORÈME 10.3. *Les formes multilineaires alternees* $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ *(resp. symetriques* $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$*) sont exactement les formes multilineaires verifiant*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma.\Lambda = \mathrm{sign}(\sigma)\Lambda \ (resp.\ \sigma.\Lambda = \Lambda). \tag{10.1.1}$$

Preuve : Simplement parce que ($\Lambda$ alterné)
sign est un morphisme de gpe
et si $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_t$ $\tau_i$ = transposition

$$\sigma.\Lambda = \tau_1(\tau_2(\dots \tau_t.\Lambda)) = (-1)^t \Lambda$$

$$= \mathrm{sign}(\sigma)\,\Lambda$$

.....

□

THÉORÈME 10.4 (Dimension des espaces de formes alternees). *On suppose que* $\mathrm{car}(K) \neq 2$. *Soit* $d = \dim V$. *On a*

$$\dim \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) = \begin{cases} 0 & si\ n > d \\ 1 & si\ n = d \\ C_d^n\ si\ n \leqslant d \end{cases}$$

Si Car $K=2$ alors $+1_K = -1_K$ et les formes sym et alternées sont identiq

Preuve :

Si $\Lambda$ est alternée en $n$ variables

alors $\forall\ i<j$ $\forall v \in V$

$$\Lambda(v_1, \dots, v_{i-1}, \underset{i}{v}, \dots \underset{j}{v}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$$

si on applique $(i_d)$ on obtient

$$\Lambda(v_1, \dots, v, \dots, v, v_{d+1}, \dots, v_n)$$

$$= -\Lambda(v_1, \dots, v, \dots, v, v_{d+1}, \dots, v_n)$$

$$\Rightarrow 2\Lambda(v_1, v, \dots, v, v_{d+1}, \dots v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda(v_1, \dots, v, \dots, v, v_{d+1}, \dots, v_n) = 0$$

car on peut diviser par 2.

Plus generalement si la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est liée alors

$\Lambda(v_1, \dots, v_n) = 0$. En effet si elle est lie il existe $i \leq n$ tq

$v_i$ est CL de $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n\}$

par exemple $v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$

$$\Lambda(v_1, \dots, v_n) = \Lambda(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1})$$

$$= \lambda_1 \Lambda(v_1 \dots, v_{n-1}, v_1) + \dots + \lambda_{n-1} \Lambda(v_1, \dots, v_{n-1}, v_{n-1})$$

$$= 0$$

$$= 0.$$

En particulier si $n > d$ la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est toujours liée.

et $\Lambda(v_1, \dots, v_n) = 0$

Si $n=d$. Si $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(d)}(V;K)$

$$\Lambda = \sum_{\underline{d} \in \{1,\dots,d\}^d} \Lambda(e_{d_1},\dots,e_{d_d})\, e^*_{d_1} \otimes \dots \otimes e^*_{d_d}$$

$\underline{d} = (d_1,\dots,d_d)$

$(\{e^*_j \ j=1\dots d\} = \text{base de } V)$

Si $\underline{d}$ est tel que il existe $i<i'$ avec $d_i = d_{i'}$

alors $\Lambda(e_{j_1} \dots e_{j_i}, \dots, e_{j_{i'}}, \dots e_{j_d}) = 0$

car $\Lambda$ est alternée.

la somme sur les $\underline{j}$ ne contient que

des termes ou les $j_i$ $i=1 \dots d$ sont

distinct les $j_i$ sont $d$ entiers compris

entre entre $1$ et $d$ qui sont tous

distincts.

$\Rightarrow$ il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ tq

$$(j_1, \dots, j_d) = (\sigma(1), \dots, \sigma(d))$$

$$\Rightarrow \Lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \Lambda(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(d)}) e^*_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^*_{\sigma(d)}$$

$$\Lambda(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(d)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \Lambda(e_1, \dots, e_d)$$

$$\Lambda = \Lambda(e_1, \dots, e_d) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \operatorname{sign}(\sigma) e^*_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^*_{\sigma(d)}$$

Pour mq

$\dim \mathrm{Alt}^{(d)}(V;K) = 1$ il suffit de mq

$$\Delta_B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma)\, e^*_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes e^*_{\sigma(d)}$$

est une forme alternée et $\neq 0$

THÉORÈME 10.5. *La function* $\Delta_{\mathscr{B}} : V^d \mapsto K$ *definie pour un* $d$*-uple de vecteurs* $(v_1, \cdots, v_d)$ *s'ecrivant dans une base* $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$

$$v_i = \sum_{j=1}^{d} x_{ij}\mathbf{e}_j, \ i = 1, \cdots, d,$$

*par*

$$\Delta_{\mathscr{B}}(v_1, \cdots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot x_{d\sigma(d)} \tag{10.1.5}$$

*est une forme multilineaire alternee non-nulle.*

Rmq $x_{1\sigma(1)} \times \cdots \times x_{d\sigma(d)} = e^*_{\sigma(1)}(v_1) \times \cdots \times e^*_{\sigma(d)}(v_d)$

Preuve : mq $\Delta_B$ est $\neq 0$ en l'evalue sur $(e_1, \ldots, e_d)$

$$\Delta_B(e_1,\dots,e_d)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\operatorname{sign}(\sigma)\,e^*_{\sigma(1)}(e_1).e^*_{\sigma(2)}(e_2)\times\dots\times e^*_{\sigma(d)}(e_d)$$

On sait que $e_i^*(e_j)=\delta_{i=j}$

$$=\sum_{\sigma}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{j=1}^{d}\delta_{d=\sigma(j)}$$

$$=\operatorname{sign}(Id_{\{1,\dots,d\}})\prod_{i=1}^{d}1=1$$

$\Delta_B\neq 0$

Soit $\tau$ = permutation de $\{1, \dots, d\}$

$$\tau . \Delta_B = \tau \left( \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) \sigma^{-1} . (e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*) \right)$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) \tau . \sigma^{-1} . (e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*)$$

$$\sigma' = \tau \circ \sigma^{-1} \qquad \sigma^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma'$$

$$= \sum_{\sigma'} \operatorname{sign}(\sigma'^{-1} \circ \tau) \sigma' . (e_1^* \otimes \dots e_d^*)$$

$$\operatorname{sign}(\sigma^{-1}\circ\tau) = \operatorname{sign}(\tau)\operatorname{sign}(\sigma^{-1})$$

$$= \operatorname{sign}(\tau)\sum_{\sigma'} \operatorname{sign}(\sigma'^{-1})\,\sigma'\cdot(e_1^*\otimes\cdots\otimes e_1^*)$$

$$\operatorname{sign}''(\sigma')$$

$$= \operatorname{sign}(\tau)\,\Delta_B = \operatorname{sign}(\tau)\,\Delta_B$$

$$\operatorname{sign}(\sigma') \in \{\pm 1\} \qquad \operatorname{sign}(\sigma')^{-1} = \operatorname{sign}(\sigma')$$

$\Longrightarrow$ $\Delta_B$ est $\neq 0$ et alternée. $\square$

**Lemme :** Si $\ell_1, \dots, \ell_n \in V^*$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors

$$\sigma.(\ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_n) = \ell_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \ell_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Preuve : $\sigma.(\ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_n)(v_1, \dots, v_n)$

$$= \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_n (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

$$= \ell_1(v_{\sigma(1)}) \ell_2(v_{\sigma(2)}) \dots \ell_n(v_{\sigma(n)})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \ell_i(v_{\sigma(i)}) \qquad j = \sigma(i) \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(j)$$

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \ell_{\sigma^{-1}(\alpha)}(v_\alpha) = \ell_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \ell_{\sigma^{-1}(n)} \cdot (v_1, \ldots, v_n)$$

□

DÉFINITION. *Soit $V$ un $K$-EV de dimension $d$ et $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de $V$.*
*La forme alternee $\Delta_{\mathscr{B}}$ est appellee determinant de $V$ dans la base $\mathscr{B}$. On la note egalement*

$$\det_{\mathscr{B}} = \Delta_{\mathscr{B}}.$$

*On a pour $v_i = \sum_{j=1}^{d} x_{ij}\mathbf{e}_j,\ i \leqslant d$*

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \cdots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)}. \cdots .x_{d\sigma(d)}$$

*C'est l'unique forme multilineaire alternee $\Lambda$ verifiant*

$$\Lambda(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d) = 1. \tag{10.1.7}$$

*C'est une base de $\mathrm{Alt}^{(d)}(V, K)$ et plus precisement pour $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(d)}(V, K)$ on a*

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d)\Delta_{\mathscr{B}}. \tag{10.1.8}$$

*Si on prend $V = K^d$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_d^0$ la base canonique on note simplement $\Delta_d = \det_d$. Ainsi si $v_i = (x_{ij})_{j \leqslant d}$*

$$\det_d(v_1, \cdots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)}. \cdots .x_{d\sigma(d)}.$$

# Interlude : Principe de symetrisation

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f$ est paire si $f(-x) = f(x)$

$f$ est impaire si $f(-x) = -f(x)$

a partir d'un fct qque on peut fabriquer une fct paire et impaire en posant

$$f^+(x) = f(x) + f(-x) \qquad f^-(x) = f(x) - f(-x)$$

$$f = \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$$

On se donne $W$ un $K$-ev

$G \curvearrowright W$ $G$ un gpe fini qui agit linéairement sur $W$

$$i : G \to GL(W)$$
$$g \to i(g)$$

on va ecrire l'action $w \in W$

$$i(g)(w) =: g.w.$$

On cherche un vecteur $w_G$ qui est invariant sous l'action de $G$ : $\forall g \in G \quad g.w_G = w_G$

etant donne $w \in W$

on forme

$$w_G = \sum_{g \in G} g.w$$

$\forall h \in G$ on a $h.w_G = w_G$

$$h.w_G = h.\left(\sum_{g \in G} g.w\right) = \sum_{g \in G} h.(g.w)$$

$$= \sum_{g \in G} (h * g).w$$

$g' = h * g$

$$= \sum_{g' \in G} g'.w = w_G$$

Exemple : $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$\varepsilon = \pm 1 \qquad \varepsilon . f : x \longrightarrow f(\varepsilon x)$

$x \to f(x)$ si $\varepsilon = +1$

$x \to f(-x)$ si $\varepsilon = -1$

$f^+ = 1 . f + (-1) . f$ vérifie

$f^+(\pm x) = f(x)$ $\quad f^+$ est paire.

Soit $\chi : G \to (K^\times, \times)$ un morphisme de gpe

$\chi$ s'appelle un caractere de $G$.

On peut alors chercher

$W_\chi$ qui se transforme par $\chi$ sous

l'action de $G$ : ie

$$\forall g \in G \quad g.W_\chi = \chi(g) W_\chi$$

si on prend $\chi : \{\pm 1\} \longrightarrow \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^\times$

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon$$

un fct $f_\chi$ vérifie $f_\chi(\varepsilon x) = \varepsilon f_\chi(x)$

$\hookrightarrow$ $f_\chi$ est impaire

$$f_\chi(\bar{x}) = f_\chi(x) - f_\chi(-x) = \chi(1).x) + (-1)\times f_\chi((-1).x)$$

$$= \chi(1)\chi(1).f + \chi(-1)\chi(-1)f$$

Si $W = Mult^{(n)}(V;K)$

$G = \mathfrak{S}_n \quad \chi = sign$

si $\Lambda$ verifie $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ on

$\sigma . \Lambda = sign(\sigma) \Lambda$

on est dans le cadre precedent

et $\Lambda$ est une forme alternée

THÉORÈME 10.6 (Processus de symetrisation pour l'action d'un groupe fini). *Soit $K$ un corps, $(G,.)$ un groupe fini, $W$ un $K$-ev de dimension finie et*

$$\iota : G \mapsto \mathrm{GL}(W)$$

*une action a gauche de $G$ sur $W$ qui est lineaire: $\iota$ est morphisme de groupe de $G$ vers le groupe des automorphismes de $W$. On notera cette action*

$$g \cdot w = \iota(g)(w).$$

*Soit*

$$\chi : G \mapsto (K^\times, \times)$$

*un morphisme de $G$ vers le groupe multiplicatif de $K$ (on dit que $\chi$ est un caractere de $G$ a valeurs dans $K^\times$). Soit $w \in W$ un vecteur, alors le vecteur*

$$w_\chi := \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1}.h \cdot w$$

*verifie pour tout $g \in G$*

$$g \cdot w_\chi = \chi(g).w_\chi.$$

Preuve : Soit $w_\chi = \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} \times h.w$

$g \in G$ $\quad g \cdot w_\chi = g.\left(\sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} \times h.w\right)$

$$= \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} g \cdot (h \cdot w)$$

$$= \sum_{h \in G} \chi(h)^{-1} (g * h) \cdot w$$

on pose $h' = g * h \quad h = g^{-1} * h'$

$$= \sum_{h' \in G} \chi(g^{-1} * h)^{-1} \chi(h')^{-1} h' \cdot w$$

$$\chi(g^{-1}*h')^{-1} = \left(\chi(g)^{-1}\chi(h')\right)^{-1}$$

$$= \chi(g)\chi(h')^{-1}$$

$$g \cdot w_\chi = \sum_{h'} \chi(g)\chi(h')^{-1} h' \cdot w$$

$$= \chi(g) \sum_{h'} \chi(h')^{-1} h' \cdot w$$

$$= \chi(g) w_\chi .$$

Cas $W = \mathrm{Mult}^{(d)}(V; K)$

$G = \mathfrak{S}_d$

et $w = e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*$

$$\left(e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*\right)_{sign} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} sign(\sigma)^{-1} \, \sigma . e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*$$

$$\Delta_B = \sum_{\sigma} sign(\sigma) \, \sigma . (e_1^* \otimes \dots \otimes e_d^*)$$

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot (e_1^* \otimes \cdots \otimes e_d^*)$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\, e^*_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e^*_{\sigma^{-1}(d)}$$

$$= \sum_{\sigma'} \operatorname{sign}(\sigma')^{-1}\, e^*_{\sigma'(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma'(d)}$$

$\sigma' = \sigma^{-1}$ $\qquad \operatorname{sign}(\sigma')^{-1} = \operatorname{sign}(\sigma')$

$\square$

# Determinants

THÉORÈME 10.7 (Formules combinatoire pour le determinant). *On a les formules suivantes*

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1,\cdots,v_d)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{d}x_{i\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\operatorname{sign}(\sigma)x_{1\sigma(1)}.\cdots.x_{d\sigma(d)}. \tag{10.2.1}$$

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1,\cdots,v_d)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{j=1}^{d}x_{\sigma(j)j}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\operatorname{sign}(\sigma)x_{\sigma(1)1}.\cdots.x_{\sigma(d)d}. \tag{10.2.2}$$

$v_i=\sum_{j=1}^{d}x_{ij}e_j$ $\{e_1,\cdots,e_d\}=B\subset V$ une base

Preuve: on

$$\det_B(v_1,\cdots,v_d)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{d}x_{i\sigma(i)}$$

$\sigma'=\sigma^{-1}$ $d=\sigma(i)$

$$=\sum_{\sigma'}\operatorname{sign}(\sigma')^{-1}\prod_{i=1}^{d}x_{\sigma' i}$$

$\det_B$ dépend du choix de $B$

une base différente peut donner un autre déterminant $\det_{B'}$

Mais tous sont proportionnels

$$\det_{B'} = \det_{B'}(e_1, \dots, e_d) \det_B$$

Rmq: si $(v_1, \dots, v_d) \in V^d$

alors $\det_B(v_1, \dots, v_d) \neq 0$ ssi

$(v_1, \dots, v_d)$ est une base de $V$.

- si $(v_1, \dots, v_d)$ est liée on a vu que

$$\det_B(v_1, \dots, v_d) = 0$$

- sinon $(v_1 \dots, v_d)$ est une base $B'$

et $\det_B = \det_B(v_1, \dots, v_d) \det_{B'}$

$$\det_B(v_1,\dots,v_d)=\sum_{\sigma}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{d}x_{i\sigma(i)}$$

$$j=\sigma(i)\qquad i=\sigma^{-1}(j)$$

$$\sigma'=\sigma^{-1}$$

$$=\sum_{\sigma'}\operatorname{sign}(\sigma'^{-1})\prod_{j=1}^{d}x_{\sigma'(j)j}$$

$$=\sum_{\sigma'}\operatorname{sign}(\sigma')\prod_{j=1}^{d}x_{\sigma'(j)j}$$

# Determinant d'un endomorphisme

$\varphi : V \longrightarrow V$. Etant donné $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(d)}(V;\mathbb{K})$

on pose

$$\varphi^* \Lambda : (v_1, \dots, v_d) \longrightarrow \Lambda(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_d))$$

alors $\varphi^* \Lambda$ est encore une forme multilinéaire alternée et on par la théorie du déterminant

$$\rho^* \Lambda = \varphi^* \Lambda(e_1, \dots, e_d) \det_B$$

$$= \Lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)) \det_B$$

On définit $\det \varphi$ comme étant le scalaire obtenu en prenant

$$\Lambda = \det_B$$

$$\varphi^* \det_B = \det \varphi \cdot \det_B$$

ou d'autre termes

$$\det \varphi = \det_B (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

en fait $\det \varphi \in K$ ne dépend pas du choix de $B$.

Si $\Lambda$ est n'importe quelle autre FML A

$$\Lambda = \lambda \det_B$$

et $\varphi^* \Lambda = \lambda \varphi^* \det_B = \lambda \det \varphi . \det_B$

$$= \det \varphi (\lambda \det_B) = \det \varphi . \Lambda$$

en particulier si on prend

$\Lambda = \det_{B'}$ $B'$ une autre base

on a la formule $\varphi^* \det_{B'} = \det \varphi \det_{B'}$

THÉORÈME 10.8 (Proprietes fonctionelles du determinant). *Soit* $\varphi : V \mapsto V$ *un endomorphisme. Pour tout* $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(d)}(V;K)$, *on a*

$$\varphi^*(\Lambda) = \det(\varphi)\Lambda. \tag{10.2.5}$$

*En particulier* $\det(\varphi)$ *ne depend pas du choix de la base* $\mathscr{B}$.
*L'application* $\det : \mathrm{End}(V) \mapsto K$ *a les proprietes suivantes*

*(1) Homogeneite: soit* $\lambda \in K$ *alors*

$$\det(\lambda.\varphi) = \lambda^d.\det(\varphi).$$

*(2) Multiplicativite: on a*

$$\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi)\det(\varphi) = \det(\varphi)\det(\psi) = \det(\varphi \circ \psi).$$

*(3) Critere d'inversibilite: on a*

$$\det(\varphi) \neq 0 \Longleftrightarrow \varphi \in \mathrm{GL}(V).$$

*(4) Invariance par conjugaison: pour tout* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *et* $\psi \in \mathrm{GL}(V)$ *on a*

$$\det(\mathrm{Ad}(\psi)(\varphi)) = \det(\psi\varphi\psi^{-1}) = \det(\varphi).$$

*(5) Morphisme: L'application*

$$\det : \mathrm{GL}(V) \mapsto K^\times$$

*est un morphisme de groupes. En particulier* $\det(\mathrm{Id}_V) = 1$.

Preuve : (1) on a pour tout base $B$

$$\varphi^* \det_B = \det \varphi \, \det_B$$

$$\det \varphi = \det_B(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

si on remplace $\varphi$ par $\lambda\varphi$ $\lambda \in K$

$$\det(\lambda\varphi) = \det_B(\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_d))$$

$$= \lambda^d \det_B(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

$$= \lambda^d \det \varphi .$$

$$\det \psi \circ \varphi$$

$$(\psi \circ \varphi)^* \det_B = \det(\psi \circ \varphi) \det_B$$

$$(\psi \circ \varphi)^* \det_B (v_1, \dots, v_d)$$

$$= \det_B (\psi \circ \varphi(v_1), \dots, \psi \circ \varphi(v_d))$$

$$= \det_B(\psi(\varphi(v_1)), \dots, \psi(\varphi(v_d)))$$

$$= \varphi^*(\psi^* \det_B)(v_1, \dots, v_d)$$

$$= \det\varphi \cdot \psi^* \det_B(v_1, \dots, v_d)$$

$$= \det\varphi \times \det\psi \det_B(v_1, \dots, v_d)$$

$$= \det\psi \times \det\varphi \cdot \det_B(v_1, \dots, v_d)$$

3 On a vu

$$\det \varphi = \det_B(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

et on sait que $\det_B(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)) \neq 0$

ssi $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)\}$ est une base de $V$

$$\iff \varphi \in GL(V)$$

4) $\det(\psi\circ\varphi\circ\psi^{-1}) = \det(\psi)\det(\varphi)\det(\psi^{-1})$

$\psi\in GL(V)$

$= \det(\psi)\det(\psi^{-1})\times\det(\varphi)$

Il suffit de voir que $\det(\psi^{-1}) = \det(\psi)^{-1}$

Mais $\det\psi\times\det(\psi^{-1}) = \det(\psi\circ\psi^{-1})$

$= \det(Id_V)$

$$\det Id_V = \det_B(Id_V(e_1), \dots, Id_V(e_d))$$

$$= \det_B(e_1, \dots, e_d) = 1$$

Définition 10.5. *Le noyau du morphisme* $\det : \mathrm{GL}(V) \mapsto K^\times$ *est appelle "groupe special lineaire de* $V$*" et on le note*

$$\mathrm{SL}(V) = \ker \det = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V),\ \det \varphi = 1\}.$$

*C'est un sous-groupe distingue de* $\mathrm{GL}(V)$ *(car c'est un noyau).*

# Determinant d'une matrice

DÉFINITION 10.6. *Soit $M \in M_d(K)$ une matrice carree de coefficients $M = (m_{ij})_{ij\leqslant d}$. Le determinant $\det(M)$ de $M$ est (de maniere equivalente):*

*(1) Le scalaire*

$$\det M = \det(\varphi_M)$$

*ou $\varphi_M : K^d \mapsto K^d$ est l'application lineaire sur $K^d$ dont la matrice dans la base canonique*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}^0}(\varphi_M) = M.$$

*(2) Le determinant –relatif a la base canonique $\mathscr{B}^0_{\mathrm{Col}_d}$ de l'espace vectoriel $\mathrm{Col}_d(K)$ des vecteurs colonnes de hauteur $d$– de l'ensemble des vecteurs colonnes de e la matrice $M$:*

$$\det(M) = \det_{\mathscr{B}^0_{\mathrm{Col}_d}}(\mathrm{Col}_1(M), \cdots, \mathrm{Col}_d(M))$$

*(3) Le determinant – relatif a la base canonique $\mathscr{B}^0_{\mathrm{Lig}_d}$ de l'espace vectoriel $\mathrm{Lig}_d(K)$ des vecteurs lignes de longueur $d$– des vecteurs lignes de la matrice $M$ dans l'espace des vecteurs lignes $\mathrm{Lig}_d(K)$:*

$$\det(M) = \det_{\mathscr{B}^0_{\mathrm{Lig}_d}}(\mathrm{Lig}_1(M), \cdots, \mathrm{Lig}_d(M))$$

*(4) La somme*

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) m_{\sigma(1)1}. \cdots . m_{\sigma(d)d}. \tag{10.2.4}$$

*(5) La somme*

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)}. \cdots . m_{d\sigma(d)}. \tag{10.2.5}$$

Rmq : $\varphi : V \to V$ $\quad B \subset V$ $\quad M = \mathrm{mat}_B \varphi$

$$\det(\mathrm{mat}_B \varphi) = \det(\varphi)$$

Preuve :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & m_{1d} \\ & & & \\ m_{d1} & & & m_{dd} \end{pmatrix}$$

Exemple $d=2$ $G_2 = \{Id_2, (1,2)\}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in G_2} \operatorname{sign}(\sigma)\, m_{1\sigma(1)}\, m_{2\sigma(2)}$$

$$= m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}$$

$$= ad - bc.$$